Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 09.07.2009

9. Übungsblatt zur Vorlesung Stochastische Partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 18: Gegeben sei die Lösung u des linearen Problem

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u(t) &= \tilde{A}_t u(t)\mathrm{d}t + f(t)\mathrm{d}t + \Phi(t)\mathrm{d}W(t) \quad t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

wobei f vorhersagbarer, H-wertiger Prozess, $\Phi \in \mathcal{P}_T$ mit

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \{\|f(s)\|_H^2 + \|\Phi\|^2_{\mathcal{L}_2^R}\}\mathrm{d}s\right] < \infty.$$

Zeigen Sie, dass die Energiegleichung

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_H^2 &= \|u_0\|_H^2 + 2\int_0^t \langle \tilde{A}_s u(s), u(s)\rangle \mathrm{d}s + 2\int_0^t \big(f(s), u(s)\big)\mathrm{d}s \\ &\quad + 2\int_0^t \big(u(s), \Phi(s)\mathrm{d}W(s)\big) + \int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{\mathcal{L}_2^R} \end{aligned}$$

gilt, und folgern Sie daraus, dass

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_H^2 + \int_0^T \|u(s)\|_V^2 \mathrm{d}s\right] \le C_T \mathbb{E}\left[\|u_0\|_H^2 + \int_0^T \Big(\|f(s)\|_H^2 + \|\Phi(s)\|^2_{\mathcal{L}_2^R}\Big)\,\mathrm{d}s\right]$$

gilt.

Aufgabe 19: **(Zylindrischer Wienerprozess II)** Sei $R \in \mathcal{L}(K)$ semipositiv definit, symmetrisch, nicht notwendigerweise mit endlicher Spur, seien $\{e_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von $K_0 = R^{1/2}(K)$ und $\{\beta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ eine Familie von unabhängigen reellwertigen Wienerprozessen. Definiere $R_1 = JJ^*$, mit $J : K_0 \to K_1 = K$ aus Aufgabe 17. Beweisen Sie, dass die Reihe

$$W(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \beta_k(t) J e_k, \quad t \in [0,T],$$

in $\mathcal{M}_T^2(K_1)$ konvergiert und, dass W ein R_1-Wienerprozess ist.

Bemerkung: Es gilt $R_1^{1/2}(K_1) = J(K_0)$ und $\|u_0\|_0 = \|R_1^{-1/2} J u_0\|_1 = \|Ju_0\|_{R_1^{1/2}K_1}$, d.h. $J : K_0 \to R_1^{1/2}K_1$ ist eine Isometrie (siehe z.B. das Buch von C. Prévôt und M. Röckner, Abschnitt 2.5.1 und Anhang B).

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 14.07.2009