Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 23.06.2009

7. Übungsblatt zur Vorlesung Stochastische Partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 14: Seien H und K Hilberträume, und W ein R-Wienerprozess mit Werten in K. Ziel dieser Aufgabe ist der Beweis der Eindeutigkeit der milden Lösung von

$$\mathrm{d}u(t) = (Au(t) + f(t))\,\mathrm{d}t + B\mathrm{d}W, \quad u(0) = u_0 \in H, \tag{1}$$

wobei $A : D(A) \subset H \to H$, $B \in \mathcal{L}(K, H)$ und f die Bedingungen **(A1)-(A3)** aus der Vorlesung erfüllen, sowie

$$\int_0^T \mathrm{Tr}[S(r)BRB^*S^*(r)]\mathrm{d}s < \infty \tag{2}$$

gilt. Wegen der Linearität des Problems, koennen wir im Folgende annehmen, dass $u_0 = 0$ und $f \equiv 0$. Um die Eindeutigkeit der Lösung zu zeigen, beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Sei u eine milde Lösung von (1). Es gilt

$$(u(t), \zeta) = \int_0^t \big(u(s), \zeta'(s) + A^*\zeta(s)\big)\mathrm{d}s + \int_0^t \big(\zeta(s), B\mathrm{d}W(s)\big)$$

für alle $\zeta \in C^1([0,T]; D(A^*))$ und $t \in [0,T]$.

Hinweis: Zeigen Sie die Identität nur für spezielle Funktionen $\zeta = \zeta_0\varphi(s)$, $s \in [0,T]$, wobei $\varphi \in C^1([0,T])$ und $\zeta_0 \in D(A^*)$, da diese dicht in $C^1([0,T]; D(A^*))$ sind.

b) Wenden Sie Punkt **a)** auf die Funktion $\zeta(s) = S^*(t-s)\zeta_0$, $\zeta_0 \in D(A^*)$, $s \in [0,t]$ an, um die Eindeutigkeit zu Zeigen.

Hinweis: $D(A^*)$ ist dicht in H.

Aufgabe 15: Sei $O \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit regulärem Rand. Gegeben Sei die folgende SPDE.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u(t,\xi) &= \Delta u(t,\xi)\mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t,\xi), \quad t \geq 0, \xi \in O \\ u(t,\xi) &= 0, \ \xi \in \partial O \\ u(0,\xi) &= 0, \ \xi \in O \end{aligned}$$

wobei W ein R-Wienerprozess ist. Sei A die realisierung von Δ in $L^2(O)$ (d.h. $D(A) = W^{2,2}(O) \cap W_0^{1,2}(O)$). Nehmen Sie an, dass $R = \mathbb{I}$ und $Ae_k = -\mu_k e_k$ mit $\mu_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Für welche d gilt die Bedingung (2)?

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 30.06.2009