Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 06.05.2009

2. Übungsblatt zur Vorlesung Stochastische Partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 4: **(Bochner-Integral)** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger endlicher[1] Massraum, und $(V, ||\cdot||)$ sei ein Banachraum. Eine Funktion $\varphi : X \to V$ heisst *einfach* (messbar), wenn sie in der Form

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{B_i}(x) v_i$$

für Paarweise disjunkte (messbare) Mengen B_i und Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ geschrieben werden kann. Mit "einfach" ist im folgenden immer "einfach messbar" gemeint. Wir brauchen noch drei weitere Definitionen.

(1) Die Funktion $f : X \to V$ heisst *stark messbar*, falls eine Folge φ_n von einfachen Funktionen mit

$$\lim_{n\to\infty} ||f(x) - \varphi_n(x)|| = 0 \qquad \text{fast überall}$$

gibt.

(2) Sei $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{B_i}(x) v_i$ eine einfache Funktion. Das *Bochner-Integral* von φ ist definiert als

$$\int \varphi \, d\mu := \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) v_i \in V.$$

Wie beim Lebesgue-Integral zeigt man dass für einfache Funktionen φ, ψ gilt

i) $\left|\left|\int \varphi \, d\mu\right|\right| \leq \int ||\varphi(x)|| \, d\mu(x)$

ii) $\int (\alpha\varphi + \beta\psi) \, d\mu = \alpha \int \varphi \, d\mu + \beta \int \psi \, d\mu$,

und dann erweitert man die Definition auf allgemeine messbare Funktionen.

(3) Eine stark messbare Funktionen $f : X \to V$ heisst *Bochner-Integrabel*, falls es eine Folge φ_n von einfachen Funktionen gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} ||f(x) - \varphi_n(x)|| = 0 \qquad \text{fast überall}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int ||f(x) - \varphi_n(x)|| \, d\mu = 0.$$

(4) Sei $A \in \mathcal{A}$ und f Bochner-integrabel. Dann ist das Bochner-Integral definiert durch

$$\int_A f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \chi_A \cdot \varphi_n d\mu,$$

wobei die Folge φ_n die Bedingungen im Punkt 3 erfüllt.

Zeigen Sie:

a) Das Integral im Punkt 4 ist wohldefiniert (d.h. der Limes hängt nicht von der Folge ab).

b) Ein stark messbares $f : X \to V$ ist genau dann Bochner-integrabel, wenn $x \mapsto ||f(x)||$ integrabel ist. Ausserdem gilt für eine Folge wie im Punkt 3, dass

$$\int ||f|| \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int ||\varphi_n|| \, d\mu.$$

[1] Diese Bedingung wird nur der Einfachheit halber angenommen, dies ist jedoch nicht notwendig.

c) Für eine Bochner-integrable Funktion gilt $||\int f\,d\mu|| \leq \int ||f||\,d\mu$

d) Seien V, W zwei Banachräume, $T \in L(V,W)$ eine beschränkte lineare Abbildung und $f : X \to V$ Bochner-integrabel. Dann ist $Tf : X \to W$ Bochner-integrabel und

$$\int Tf\,d\mu = T\int f\,d\mu.$$

Aufgabe 5: **(Gauss'sche Masse auf Hilberträume)** Sei $(H, \langle .,. \rangle)$ ein Hilbertraum. Sei $a \in H$ und $Q \in \mathcal{L}_1(H)$ symmetrisch. Dann existiert eine Orthonormalbasis (e_k) und eine Folge von nicht negativen Zahlen (λ_k) mit

$$Qe_k = \lambda_k e_k.$$

Wir definieren $x_k := \langle x, e_k \rangle$ und $P_n x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$, $x \in H$, $n \in \mathbb{N}$. Wir führen den natürlichen Isomorphismus γ zwischen H und den Raum ℓ^2 von alle Folgen (x_k) von reelle Zahlen mit $\sum_{k\geq 1} x_k^2 < \infty$ ein, definiert durch

$$\gamma : H \to \ell^2 \tag{1}$$
$$x \mapsto \gamma(x) = (x_k). \tag{2}$$

Im Folgenden identifizieren wir H und ℓ^2, insbesondere setzen wir $P_n x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x \in \ell^2$.
Jetzt betrachten wir den metrischen Raum $(\mathbb{R}^\infty, d(.,.))$ mit

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

Eine Menge $I \subset \mathbb{R}^\infty$ wird *zylindrisch* genannt, falls die Form

$$I = \{x = (x_k) \in \mathbb{R}^\infty \mid (x_1, \ldots x_n) \in A\},$$

für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ besitzt. Die von der Familie $\mathcal{C}$ der zylindrischen Mengen in $\mathbb{R}^\infty$ erzeugte σ-Algebra stimmt mit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ überein. Auf diesem Raum kann man das Produktmass

$$\mu := \bigotimes_{k=1}^{\infty} N_{a_k,\lambda_k}$$

durch den Caratheodory Erweiterungssatz definieren (siehe P.R. Halmos, *Measure Theory*, Van Nostrand, 1961, Kap. 38.B), wobei N_{a_k,λ_k} das Gauss-Mass mit Mittelvert a_k und Varianz λ_k ist. Wir werden zeigen, dass $\mu := \bigotimes_{k=1}^{\infty} N_{a_k,\lambda_k}$ ein Gauss-Mass auf $H = \ell^2$ mit Erwartungswert a und Kovarianzoperator Q ist. Zeigen Sie:

a) $\ell^2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$,

b) $\mu(\ell^2) = 1$

c) $\int e^{i\langle x,h \rangle} \mu(dx) = e^{i\langle a,h\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle Qh,h\rangle}$

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 12.05.2009