Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 13. 1. 2009

12. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen

Aufgabe 38:

Beweisen Sie folgenden Satz über den Quadraturfehler: Für eine interpolatorische Quadraturformel $Q_T(.)$ der Ordnung $r \geq d$ (d = Raumdimension) auf einer Zelle $T \in \mathcal{T}_h$ angewandt auf eine Funktion $v \in W^{r,1}(T)$ gilt

$$\Big| \int_T v dx - Q_T(v) \Big| \leq c_q h_T^r \int_T |\nabla^r v| dx,$$

mit einer von T und $v \in H^r(T)$ unabhängigen Konstante $c_q > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie das Bramble-Hilbert-Lemma und das Transformationsargument aus dem speziellen Interpolationssatz.

Aufgabe 39:

Schreiben Sie den Beweis der in Aufg. 37 angegebenen Konditionsabschätzung um für folgende RWA:

$$-\triangle u = f \text{ in } \Omega \quad \partial_n u = 0 \text{ auf} \partial\Omega.$$

Aufgabe 40:

Das allg. „Abstiegsverfahren“ zur iterativen Lösung des Systems $Ax = b$, $A \in \mathbf{R}^{N \times N}$ symmetrisch und positiv-definit, lautet:

$$\begin{array}{rl} \text{Startwert:} & x^{(0)} \in \mathbf{R}^N,\ r^{(0)} := b - Ax^{(0)}, \\ \text{für } t >= 0: & \text{Abstiegsrichtung } d^{(t)}, \\ & \alpha_t := \frac{\langle r^{(t)}, d^{(t)} \rangle}{\langle Ad^{(t)}, d^{(t)} \rangle}, \\ & x^{(t+1)} := x^{(t)} + \alpha_t d^{(t)},\ r^{(t+1)} := r^{(t)} - \alpha A d^{(t)}. \end{array}$$

Bei der „Koordinatenrelaxation“ wählt man für $d^{(t)}$ zyklisch die kartesischen Einheitsvektoren $\{e^{(1)}, \dots, e^{(N)}\}$. Zeigen Sie, dass jeder N-Zyklus dieser Koordinatenrelaxation äquivalent ist zum Gauß-Seidel-Verfahren.

Besprechung der Aufgaben in der Übungsstunde am 23. 1. 2009.