Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 23.6.2009

7. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 37 :

Seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan \frac{x}{y}\,, & \text{falls } y \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}\,, & \text{falls } y = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx\,.$$

Bestimmen Sie die Punkte, an denen g stetig differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung g'.

Aufgabe 38 :

Sei $f(x,y,z) = \alpha x^2 e^y + y^2 e^z + z^2 e^x$. Für welche Werte von α ist $(0,0,0)$ ein lokales Minimum oder Maximum?

Aufgabe 39 :

(Peano 1884, Annotazioni N. 133-136) Zeigen Sie, dass für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$$

der Gradient in $(0,0)$ verschwindet, dass aber $(0,0)$ kein lokales Minimum ist. Zeigen Sie aber auch, dass die Funktion auf allen Geraden durch $(0,0)$ ein strenges lokales Minimum hat.

Aufgabe 40 :

Sei $c > 0$ gegeben. Bestimmen Sie das Dreieck mit den Seitenlängen $x, y, z > 0$ und dem Umfang $2c = x + y + z$, dessen Flächeninhalt maximal ist.

Aufgabe 41 :

Zeigen Sie: Falls $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zweimal stetig differenzierbar sind, so gilt in einem lokalen Minimum x_0 von f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$

$$v^T \left(\nabla^2 f(x_0) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla^2 g_i(x_0) \right) v \geq 0 \qquad \text{für alle } v \in \operatorname{Ker} Dg(x_0)\,.$$

Hierbei sind λ_i die Lagrange-Multiplikatoren zu x_0.

Aufgabe 42 :

Gegeben seien $a, b, c > 0$, die Menge $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0\} \subset \mathbb{R}^3$ und die Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, vermöge $f : (x,y,z) \mapsto x^a y^b z^c$.

(a) Finden Sie einen Punkt $p \in U$, sodass p eine notwendige Bedingung für ein lokales Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung $x^k + y^k + z^k = 1$ $(k > 0)$ erfüllt.

(b) Unter der Annahme, dass Sie so ein globales Maximum von f unter dieser Nebenbedingung gefunden haben, schließen Sie für $u, v, w > 0$ auf die Ungleichung

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a \left(\frac{v}{b}\right)^b \left(\frac{w}{c}\right)^c \leq \left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c} .$$

Es werden Lösungen für fünf Aufgaben gewertet. Diese werden so ausgewählt, dass Sie eine möglichst hohe Punktzahl erreichen.
Abgabe in der Vorlesungspause am 30.6.2009,
Besprechung in den Übungen am 2.7.2009 bzw. 3.7.2009