Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 12.5.2009

4. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 19 :

Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \,, \quad f(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ 1/2 \sin^3 t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,, \quad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^3 - 3x_1x_2^2 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 \end{pmatrix} ,$$

und skizzieren Sie die Menge $f([0, 2\pi])$ (Astroide).

Aufgabe 20 :

Untersuchen Sie, ob die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

(a) $f(x_1, x_2) = x_1x_2 \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$

(b) $f(x_1, x_2) = x_1^2x_2^2 \, \ln(x_1^2 + x_2^2)$

(c) $f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 \, x_2|}$

für $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ und $f(0, 0) = 0$ differenzierbar in $(0, 0)$ sind, und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

Hinweis: Es gilt $\ln x \leq x$.

Aufgabe 21 :

Zeigen Sie: Sind $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so auch das Produkt fg. Berechnen Sie dessen Ableitung.

Aufgabe 22 :

Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(X) = X^2$, ist differenzierbar, und ihre Ableitung ist gegeben durch

$$f'(X)H = XH + HX \,.$$

Aufgabe 23 :

Sei $X \subset \mathbb{R}^m$ offen und wegzusammenhängend, und seinen $z, w \in X$. Da X wegzusammenhängend ist, wissen wir, dass es eine stetige Funktion $\gamma : [0, 1] \to X$ gibt, sodass $\gamma(0) = z$ und $\gamma(1) = w$. Zeigen Sie: Es gibt endlich viele offene Kugeln $B_1, \ldots, B_r$, sodass $\gamma([0, 1]) \subset B_1 \cup \ldots \cup B_r \subset X$.

Aufgabe 24 :
Gegeben seien die offene, wegzusammenhängende Menge $X \subset \mathbb{R}^m$, die Punkte $z, w \in X$, die Kurve $\gamma : [0,1] \to X$ und die endliche Überdeckung $\{B_1, \ldots, B_r\}$ aus Aufgabe 23.
Zeigen Sie: Es existieren Punkte $z = z_0, \ldots, z_n = w$, sodass für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ die Verbindungsstrecke von z_{k-1} nach z_k ganz in X liegt, also $\{\Theta z_{k-1} + (1 - \Theta) z_k : \Theta \in [0,1]\} \subset X$.

Hinweis: Man erhält so einen Polygonzug (d.h. eine Kurve, die aus endlich vielen Geradenstücken besteht), der z mit w verbindet. In einem möglichen Beweis zeigt man folgende Aussagen:

1. Ist für $i = 1, \ldots, r$ die Menge U_i das Urbild $\gamma^{-1}(B_i \cap \gamma([0,1]))$ und ist $w_i = \gamma(\sup U_i)$, dann ist $w_i = w$ oder $w_i \in \partial B_i$.
2. Es gibt ein $j \in \{1, \ldots, r\} \setminus \{i\}$, sodass für jeden Punkt $x \in B_i$ die Verbindungsstrecke von x nach w_i ganz in $B_i \cup B_j$ liegt.

Anschließend definiert man die gesuchten Punkte $z_0, \ldots, z_n$ in geeigneter Weise und zeigt, dass man nur endlich viele Schritte benötigt.

Es werden Lösungen für fünf Aufgaben gewertet. Diese werden so ausgewählt, dass Sie eine möglichst hohe Punktzahl erreichen.
Abgabe in der Vorlesungspause am 26.5.2009,
Besprechung in den Übungen am 28.5.2009 bzw. 29.5.2009