Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 14.7.2009

10. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 55 :
Sei $A = \{x \in \mathbb{R}^n |\ r_1 \leq \|x\|_2 \leq r_2\}$, $\quad \Phi : [r_1, r_2] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(x) = \Phi(\|x\|_2)$. Zeigen Sie für $n = 3$:

$$\int_A f(x)dx = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \Phi(r)r^2 dr\ .$$

Wie sieht die entsprechende Formel für $n = 2$ aus?

Aufgabe 56 :
Berechnen Sie für $x, y > 0$ den Flächeninhalt des von den Kurven $xy = 2,\ xy = 4,\ xy^3 = 3$ und $xy^3 = 6$ eingeschlossenen Gebietes.
Hinweis: Transformationsformel

Aufgabe 57 :
Sei $B_R = \{(x, y)|\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $\quad Q_R = \{(x, y)|\ |x| \leq R$ und $|y| \leq R\}$.

(a) Zeigen Sie: $\lim_{R\to\infty} \int_{B_R} \exp\left(-(x^2 + y^2)\right) d(x, y) = \pi$

(b) Folgern Sie aus (a): $\lim_{R\to\infty} \int_{Q_R} \exp\left(-(x^2 + y^2)\right) d(x, y) = \pi$.

(c) Zeigen Sie: $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$.
Hinweis: $\left(\int_{-R}^{R} \exp(-x^2)dx\right) \left(\int_{-R}^{R} \exp(-y^2)dy\right)$ als Doppelintegral auffassen.

Aufgabe 58 :
Berechnen Sie

$$\int_\Gamma (x^2 y dx + xy^2 dy)$$

wobei Γ der Rand der von den Kurven $y = x^2$ und $y = 8 - x^2$ eingeschlossenen Fläche ist.

Aufgabe 59 :
(Umparametrisierung der Geodätengleichung)
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine zweimal stetig differenzierbare, reguläre Parametrisierung von $G := \gamma([a, b])$. Seien weiter für $i, j = 1, \ldots, n$ die Funktionen $\Gamma_{ij} : G \to \mathbb{R}^n$ sowie $\lambda : G \to \mathbb{R}$ gegeben, sodass folgende Gleichung für alle $t \in (a, b)$ gilt

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2}(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}(\gamma(t)) \frac{d\gamma_i}{dt}(t) \frac{d\gamma_j}{dt}(t) = \lambda(\gamma(t)) \frac{d\gamma}{dt}(t),$$

wobei $\gamma_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ die Komponenten von γ sind.

Zeigen Sie: Falls es eine bijektive Funktion $\alpha : [\hat{a}, \hat{b}] \to [a, b]$ mit $\alpha \in C^2((\hat{a}, \hat{b}))$ gibt, sodass

$$\frac{d^2\alpha}{d\tau^2}(\tau) = -\lambda(\gamma(\alpha(\tau))) \left(\frac{d\alpha}{d\tau}(\tau)\right)^2, \quad \forall \tau \in (\hat{a}, \hat{b})$$

dann gibt es eine reguläre, zweimal stetig differenzierbare Parametrisierung $\tilde{\gamma} : [\hat{a}, \hat{b}] \to \mathbb{R}^n$ von G mit

$$\frac{d^2\tilde{\gamma}}{d\tau^2}(\tau) + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}(\tilde{\gamma}(\tau)) \frac{d\tilde{\gamma}_i}{d\tau}(\tau) \frac{d\tilde{\gamma}_j}{d\tau}(\tau) = 0, \quad \forall \tau \in (\hat{a}, \hat{b}).$$

Aufgabe 60 :

Sei $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) Für beliebige Punkte $a, b \in \mathbb{R}^2$ ist das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma (v_1 dx_1 + v_2 dx_2)$$

unabhängig von der Wahl der Kurve Γ zwischen a und b.

(b) Es gibt eine Funktion $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, so dass $v = \nabla \phi$.

Hinweis: Man wähle

$$\phi(x) = \int_{x_0}^{x} (v_1 dx_1 + v_2 dx_2) \; .$$

Es werden Lösungen für fünf Aufgaben gewertet. Diese werden so ausgewählt, dass Sie eine möglichst hohe Punktzahl erreichen.
Abgabe in der Vorlesungspause am 21.7.2009
Die Klausur findet am Do, 23.7.2009 im Raum N6 statt. Zur Teilnahme berechtigt ist, wer an den Tutorien teilgenommen und mit den ersten neun Übungsblättern mindestens 86 Punkte gesammelt hat.
Am 23.7.2009 und 24.7.2009 finden keine Übungsgruppen statt.